

مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

أولا : الجبـــــــــر

الوحدة الاولي : التباديل و التوافيق ونظرية ذات الحدين

(١) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+١)$ لكل ر ≤ ن ، ر ، ن ∈ ص+

(٢) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$

(٣) $\underline{|١} = \underline{|٠} = ١$

(٤) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$

(٥) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$

(٦) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$

(٧) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فإن س = ص ، أ س + ص = ن

(٨) $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$

(٩) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$

(١٠) $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} + \ldots\ldots\ldots + \text{أ}^{\text{ن}}$

$(\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} - \ldots\ldots\ldots + (-\text{أ})^{\text{ن}}$

(١١) $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} + (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$]

(١٢) $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$]

(١٣) $(١ \pm \text{س})^{\text{ن}} = ١ \pm {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} \pm {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} + \ldots\ldots + (\pm\text{س})^{\text{ن}}$

(١٤) الحد العام في مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ر}}$

الحد الأوسط في مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$

- إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما : $\dfrac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\dfrac{\text{ن}+٣}{٢}$
- إذا كانت ن زوجيه يوجد حد أوسط وحيد رتبته : $\dfrac{\text{ن}+٢}{٢}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(١٥) النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$ $= \frac{ع_{ر+1}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{أ}{س}$

(١٦) النسبة بين معاملي حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$

$$= \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الاول}}$$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

العدد المركب : لكل س ، ص ∈ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمي عدداً مركباً الجزء الحقيقي له هو س ، و الجزء التخيلي له هو ص حيث $ت^2 = -1$

مرافق العدد المركب : إذا كان ع = س + ص ت عدداً مركباً فإن مرافقه هو $\overline{ع} = س - ص ت$

و يكون $ع + \overline{ع}$ = عدداً حقيقيا ، $ع \, \overline{ع}$ = عدداً حقيقيا

خواص المرافق : (١) $\overline{(ع_1 + ع_2)} = \overline{ع_1} + \overline{ع_2}$

(٢) $\overline{(ع_1 \, ع_2)} = (\overline{ع_1})(\overline{ع_2})$

(٣) $\overline{\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)} = \frac{\overline{ع_1}}{\overline{ع_2}}$

التمثيل الهندسي للعدد المركب : العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) في المستوي الاحداثي لأرجاند

المقياس و السعة للعدد المركب : إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوي أرجاند فإن $|ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ، سعة ع تتعين من العلاقتين جتا $\theta = \frac{س}{ل}$ ، جا $\theta = \frac{ص}{ل}$

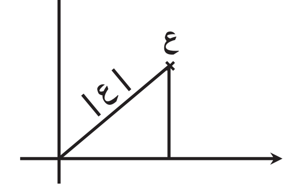
خواص المقياس و السعة للعدد المركب :

(١) $|ع| = |\overline{ع}|$ (٢) $ع \, \overline{ع} = |ع|^2 = |\overline{ع}|^2$

(٣) $|ع_1 \, ع_2| = |ع_1| \, |ع_2|$

(٤) $\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$

(٥) $|ع_1 + ع_2| \leqslant |ع_1| + |ع_2|$



(٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددا غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٧) السعة التي تنتمي للفترة $] -\pi , \pi]$ تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

(٨) سعة $\overline{ع}$ = – سعة ع

(٩) سعة (– ع) = – π + سعة ع   (١٠) سعة $\frac{١}{ع}$ = – سعة ع

<u>الصورة المثلثية للعدد المركب</u> : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث ع = | ل | ، θ السعة الأساسية

<u>ضرب و قسمة الاعداد المركبة بالصورة المثلثية</u> :

إذا كان : $ع_١ = ل_١$ (جتا $θ_١$ + ت جا $θ_١$) ، $ع_٢ = ل_٢$ (جتا $θ_٢$ + ت جا $θ_٢$)

فإن : $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢$ (جتا ($θ_١ + θ_٢$) + ت جا ($θ_١ + θ_٢$))

، $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ (جتا ($θ_١ - θ_٢$) + ت جا ($θ_١ - θ_٢$))

<u>الصورة الاسية للعدد المركب</u> : (صورة أويلر) إذا كان ع عددا مركبا مقياسه ل ، و سعته الأساسية θ فإن :

ع = ل $هـ^{θ ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$هـ^{θ ت}$ = جتا θ + ت جا θ   ، $هـ^{-θ ت}$ = جتا θ – ت جا θ = جتا(– θ) + ت جا (– θ)

<u>نظرية ديموافر</u> : إذا كان ن عدداً صحيحا فإن :

(١) $($ جتا θ + ت جا θ $)^{ن}$ = (جتا ن θ + ت جا ن θ)

(٢) إذا كان ك عددا موجبا فإن $($ جتا θ + ت جا θ $)^{\frac{١}{ك}}$ = (جتا $\frac{θ + ٢ ر π}{ك}$ + ت جا $\frac{θ + ٢ ر π}{ك}$)

أي أن مقدار $($ جتا θ + ت جا θ $)^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيما متعددة تبعا لقيم ر و يكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك

من القيم التي نحصل عليها بوضع ر = ... ، – ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... التي تجعل السعة $\frac{θ + ٢ ر π}{ك}$

محصورة بين – π ، π

<u>الجذور التكعيبية للواحد الصحيح</u> : إذا كان $ع^٣ = ١$ فإن ع ∈ $\left\{ ١ ، -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right\}$

و يرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ، ω ، $ω^٢$

حيث $ω = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت   ، $ω^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

<u>خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح</u> :

(١) $ω^٣ = ١$ (٢) $١ + ω + ω^٢$ = صفر   (٣) $ω^٢ - ω = \pm \sqrt{٣}$ ت

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الجذور النونية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^ن = ١$

فإن ع = $(جتا ٠ ^\circ + ت جا ٠ ^\circ)^{\frac{١}{ن}}$ = جتا $\frac{٢ \pi ك}{ن}$ + ت جا $\frac{٢ \pi ك}{ن}$ حيث ك ∈ ص ، $\frac{٢ \pi ك}{ن} \in [- \pi ، \pi]$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على المستوي أرجاند برؤوس مضلع عدد رؤوسه ن ، و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

المحدد : المحدد من الرتبة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة و ينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات في ن من المعادلات الخطية .

خواص المحددات :

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أي صف (عمود)
- إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
- قيمة المحدد تساوي صفر في الحالات الأتية :
  - إذا كانت جميع عناصر أي صف أو (أي عمود) في محدد تساوي صفر فإن قيمة المحدد = صفر
  - إذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد = صفر
- إذا بدلنا موضعي صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = – ١ × قيمة المحدد الأصلي
- إذا كتبت جميع عناصر أي صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين
- إذا أضفنا لعناصر أي صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) أخر مضروبة في عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي
- في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) أخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة : من النظم ٣ × ٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن | أ | ≠ صفر
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجد المصفوفة الملحقة $أ^{مل}$ لمصفوفة العوامل المرافقة
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل}$

حل أنظمة المعادلات الخطية :

باعتبار أن أ هي مصفوفة المعاملات ، س هي مصفوفة المتغيرات

ب هي مصفوفة الثوابت . فإن :

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : أ س = ب
- وحل هذه المعادلة هو : س = $أ^{-١}$ × ب

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي الصفر ، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظم م × ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث :

١ ⩽ ر (أ) ⩽ أصغر (م ، ن)

المصفوفة الموسعة : هي مصفوفة ممتدة للنظام الخطي و يرمز لها بالرمز أ * حيث :

أ * = (أ | ب) و هي على النظم م × (ن + ١)

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على صورة معادلة المصفوفة : أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ ☐

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة في ن مجهولا حل وحيد إذا كانت ر (أ) = ر (أ *) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول " عدد لا نهائي " إذا كان ر (أ) = ر (أ *) = ك حيث ك < ن
- و لا يكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر (أ) ≠ ر (أ *)

المعادلات المتجانسة :

تسمي مجموعة المعادلات التي على الصورة : أ س = ☐ بالمعادلات المتجانسة فإذا كان :

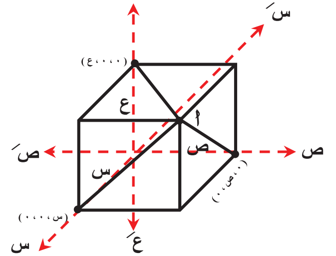
- ر (أ) = ر (أ *) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري (و يسمى بالحل البديهي لكونه شديد الوضوح)
- ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

ثانيا : الهندسة الفراغية

الوحدة الاولي : الهندسة و القياس في ثلاثة أبعاد

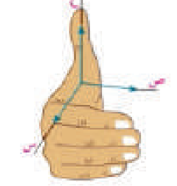
النظام الاحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد :

تتعين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات



قاعدة اليد اليمنى :


و فيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلي الاتجاه الموجب لمحور ص و يشير اتجاه الإبهام إلي الاتجاه الموجب لمحور ع



مستويات الاحداثيات :

- المستوي س ص و معادلته ع = صفر
- المستوي س ع و معادلته ص = صفر
- المستوي ص ع و معادلته س = صفر

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

أ (س١ ، ص١ ، ع١)

البعد بين نقطتين فى الفراغ :

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

نقطتين في الفراغ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

نقطتين في الفراغ ، جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ فإن احداثيات النقطة جـ هي :

$$\text{فإن}\quad جـ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$$

معادلة الكرة فى الفراغ :

- معادلة الكرة التي مركزها (ل ، ك ، ن) ، و طول نصف قطرها نق تكون :

$$(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$$

- معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها نق تكون : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = نق^٢$
- معادلة الكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + د = ٠$

حيث مركزها (− ل ، − ك ، − ن) ، و طول نصف قطرها (نق) = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - د}$

حيث $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ > د$

متجه الموضع فى الفراغ :

إذا كانت أ (أس ، أص ، أع) نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع

للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

- $أ_س$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور س
- $أ_ص$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ص
- $أ_ع$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ع

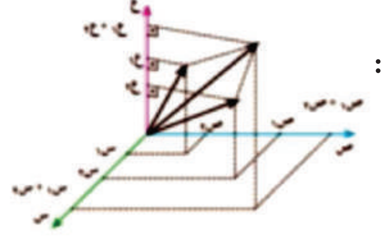
معيار المتجه :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإن $\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{أ_س^٢ + أ_ص^٢ + أ_ع^٢}$

جمع و طرح المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن :

- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (أ_س + ب_س ، أ_ص + ب_ص ، أ_ع + ب_ع)$
- $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (أ_س - ب_س ، أ_ص - ب_ص ، أ_ع - ب_ع)$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خواص عملية الجمع :

(١) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \in ع^{٣}$ خاصية الانغلاق (٢) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$ خاصية الابدال

(٣) $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$ خاصية التجميع

(٤) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$ العنصر المحايد الجمعي

(٥) $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ المعكوس الجمعي

ضرب المتجه في عدد حقيقى :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ ، ك $\in$ ح فإن ك $\overrightarrow{أ} = (ك أ_{س} ، ك أ_{ص} ، ك أ_{ع})$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $(أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع}) = (ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$

فإن : $أ_{س} = ب_{س}$ ، $أ_{ص} = ب_{ص}$ ، $أ_{ع} = ب_{ع}$

متجه الوحدة :

هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الاساسية :

- $\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور س
- $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ص
- $\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الاساسية :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{أ}$ على الصورة : $\overrightarrow{أ} = أ_{س}\overrightarrow{س} + أ_{ص}\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\overrightarrow{ع}$

التعبير عن قطعة مستقيمة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

إذا كان أ ، ب نقطتين في الفراغ متجه موضعهما $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

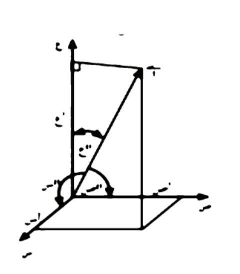
على الترتيب فإن $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$



متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ فإن متجه $\overrightarrow{ى_{أ}}$ يسمى متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ و يعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{ى_{أ}} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\| \overrightarrow{أ} \|}$$



زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ :

إذا كانت $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$

مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- $\text{أ}_{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ع}}$

($\theta_{\text{س}}$ ، $\theta_{\text{ص}}$ ، $\theta_{\text{ع}}$) تسمي بزوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

- جتا $\theta_{\text{س}}$ ، جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، جتا $\theta_{\text{ع}}$ تسمي جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$
- جتا $\theta_{\text{س}}\ \overrightarrow{\text{س}}$ + جتا $\theta_{\text{ص}}\ \overrightarrow{\text{ص}}$ + جتا $\theta_{\text{ع}}\ \overrightarrow{\text{ع}}$ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$
- و يكون : جتا^2 $\theta_{\text{س}}$ + جتا^2 $\theta_{\text{ص}}$ + جتا^2 $\theta_{\text{ع}}$ = ١

الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين في ع^3 قياس الزاوية بينهما θ حيث ٠ $\leqslant \theta \leqslant$ ١٨٠° فإن :

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا } \theta$$


خواص الضرب القياسى لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ خاصية الابدال

(٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$ خاصية التوزيع

(٣) إذا كان ك عدد حقيقي فإن (ك $\overrightarrow{\text{أ}}$) $\cdot\ \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}}\ \cdot$ (ك $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ك ($\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$)

(٤) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2$

(٥) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ = صفر فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين

الضرب القياسى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

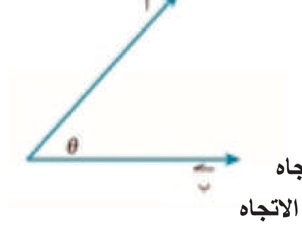
إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}, \text{أ}_{\text{ص}}, \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}, \text{ب}_{\text{ص}}, \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}$

الزاوية بين متجهين :

$\therefore$ جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$ ،


صفر° $\leq \theta \leq$ ١٨٠°



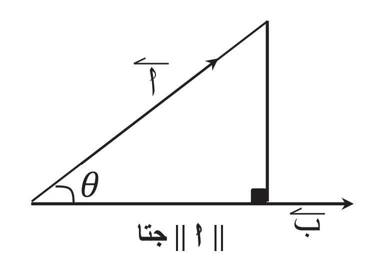
- إذا كانت جتا θ = ١ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ب}}$ و نفس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = −١ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ب}}$ و في عكس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = صفر فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

مركبة متجه فى اتجاه متجه أخر :

$\therefore$ مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta$$

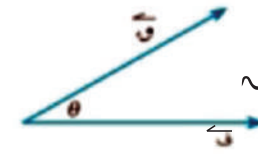
$$\text{أ}_{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$:

$$= \left(\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|^{٢}} \right) \overrightarrow{ب}$$



الشغل المبذول من قوة $\overrightarrow{ق}$ لإحداث إزاحة $\overrightarrow{ف}$:

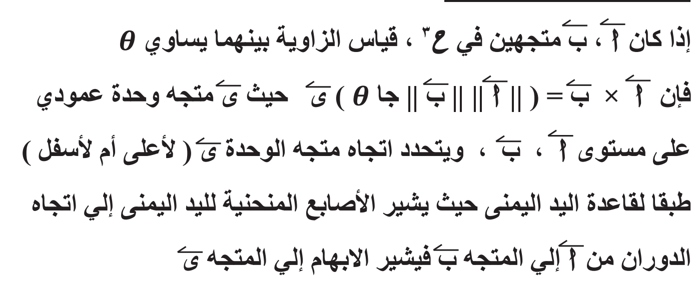
إذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم ما فحركته إزاحة $\overrightarrow{ف}$ فإننا نقول أن القوة $\overrightarrow{ق}$ قد بذلت شغلا شـ

الشغل $= \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$= \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$ جتا θ

- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ في نفس اتجاه الازاحة (θ = صفر°) شـ $= \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ في عكس اتجاه الازاحة ($\theta = ١٨٠°$) شـ $= - \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الازاحة ($\theta = ٩٠°$) شـ = صفر

الضرب الاتجاهى لمتجهين:



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في ع^{٣} ، قياس الزاوية بينهما يساوي θ

فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جا $\theta) \, \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي

على مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ (لأعلى أم لأسفل)

طبقا لقاعدة اليد اليمنى حيث يشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلي اتجاه

الدوران من $\overrightarrow{أ}$ إلي المتجه $\overrightarrow{ب}$ فيشير الابهام إلي المتجه $\overrightarrow{ى}$



خواص الضرب الاتجاهى لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = - \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$

(٢) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

(٣) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإما $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أو أحد المتجهين أو كليهما يساوي $\overrightarrow{و}$

(٥) $\overrightarrow{سَ} \times \overrightarrow{صَ} = \overrightarrow{عَ}$ ، $\overrightarrow{صَ} \times \overrightarrow{عَ} = \overrightarrow{سَ}$ ، $\overrightarrow{عَ} \times \overrightarrow{سَ} = \overrightarrow{صَ}$

$\overrightarrow{سَ} \times \overrightarrow{عَ} = - \overrightarrow{صَ}$ ، $\overrightarrow{عَ} \times \overrightarrow{صَ} = - \overrightarrow{سَ}$ ، $\overrightarrow{صَ} \times \overrightarrow{سَ} = - \overrightarrow{عَ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_{س}، ب_{ص}، ب_{ع})$

فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \end{vmatrix}$

حالة خاصة : الضرب الاتجاهى فى مستوى الاحداثيات س ص :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_{س}، أ_{ص})$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_{س}، ب_{ص})$

فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} \\ ب_{س} & ب_{ص} \end{vmatrix} \overleftarrow{ع} = (أ_{س} ب_{ص} - أ_{ص} ب_{س}) \overleftarrow{ع}$

متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$:

$$\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|}$$

توازى متجهين :

المتجهان $\overleftarrow{أ} = (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_{س}، ب_{ص}، ب_{ع})$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الاتية :

(١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$

(٢) $\frac{أ_{س}}{ب_{س}} = \frac{أ_{ص}}{ب_{ص}} = \frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$

(٣) $\overleftarrow{أ} = ك \overleftarrow{ب}$ إذا كانت $ك > ٠$ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في نفس الاتجاه

، إذا كانت $ك < ٠$ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في عكس الاتجاه

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى :

$\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|$ = مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

الضرب الثلاثى القياسى :

$\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \\ جـ_{س} & جـ_{ص} & جـ_{ع} \end{vmatrix}$

المعنى الهندسى للضرب الثلاثى القياسى :

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية

يساوي القيمة المطلقة للمقدار : $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة و المستويات في الفراغ

متجه الاتجاه :

- إذا كانت ل ، م ، ن هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overleftarrow{\text{ﻫ}}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ﻫ}}$ = (أ ، ب ، جـ) و تسمى الأعداد أ ، ب ، جـ بنسب الاتجاه للمستقيم
- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة فمثلا :

$\overleftarrow{\text{ﻫ}}$ = ٢ (ل ، م ، ن) = ٣ (ل ، م ، ن) = – ٤ (ل ، م ، ن) =..............

معادلة الخط المستقيم :

- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (س_1 ، ص_1 ، ع_1) و المتجه $\overleftarrow{\text{ﻫ}}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له هي

  الصورة المتجهة : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (س_1 ، ص_1 ، ع_1) + ك (أ ، ب ، جـ)
- المعادلات البارمترية : س = س_1 + ك أ ، ص = ص_1 + ك ب ، ع = ع_1 + ك جـ
- المعادلة الاحداثية : $\dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان $\overleftarrow{\text{ﻫ}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ﻫ}}_2$ متجهي اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين يعطي بالعلاقة :

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ﻫ}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ﻫ}}_2|}{\|\overleftarrow{\text{ﻫ}}_1\|\,\|\overleftarrow{\text{ﻫ}}_2\|}$$

و إذا كان (ل_1 ، م_1 ، ن_1) ، (ل_2 ، م_2 ، ن_2) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن :

$$\text{جتا}\,\theta = |\,\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{م}_1\text{م}_2 + \text{ن}_1\text{ن}_2\,|$$

شرط توازى و شرط تعامد مستقيمين :

إذا كان $\overleftarrow{\text{ﻫ}}_1$ = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1) ، $\overleftarrow{\text{ﻫ}}_2$ = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2) متجهي اتجاه مستقيمين فإن :

- المستقيمين متوازيان إذا كان :

  $\overleftarrow{\text{ﻫ}}_1 = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ﻫ}}_2$ أ، $\overleftarrow{\text{ﻫ}}_1 \times \overleftarrow{\text{ﻫ}}_2 = \overleftarrow{\text{و}}$ أ، $\dfrac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \dfrac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \dfrac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$
- المستقيمين متعامدان إذا كان :

  $\text{أ}_1\text{أ}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2 + \text{جـ}_1\text{جـ}_2 = \text{صفر}$

معادلة المستوى :

معادلة المستوي المار بالنقطة (س_1 ، ص_1 ، ع_1) و المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (أ ، ب ، جـ) عموديا على المستوي هي :

- الصورة المتجهة : $\overleftarrow{\text{ن}} \cdot \overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ن}} \cdot$ (س_1 ، ص_1 ، ع_1)
- الصورة القياسية : أ (س – س_1) + ب (ص – ص_1) + جـ (ع – ع_1) = صفر
- الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ ع + و = صفر ، حيث و = -أ س_1 - ب ص_1 - جـ ع_1

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١} = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overleftarrow{ن_٢} = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ متجهي العمودين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطي بالعلاقة :

$$جتا\theta = \frac{|\overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢}|}{||\overleftarrow{ن_١}|| \, ||\overleftarrow{ن_٢}||} \qquad حيث \quad ٠^\circ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان و المستويان المتعامدان :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما المتجهان العموديان على المستويين فإن :

- شرط توازي المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} // \overleftarrow{ن_٢}$ أ، $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$
- شرط تعامد المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢} = ٠$ أ، $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = صفر$

طول العمود المرسوم من نقطة على المستوى :

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي المار بالنقطة ب $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ و المتجه $\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، جـ)$ عمودي على المستوي هو ل حيث:

$$ل = \frac{|\overleftarrow{ب أ} . \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{ن}||}$$

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي الذي معادلته:

أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر هو ل حيث:

$$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + ء|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوي محاور الاحداثيات في النقط : $(س_١ ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ص_١ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، ع_١)$

فإن معادلة المستوي تكون على الصورة :

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي